

## Практична робота 9. Застосування інтеграла до розв'язування задач з фізики і економіки

*Мета.* Виробити практичні навички розв'язування задач з фізики і економіки використовуючи інтеграл.

### 1. Шлях, який пройде точка за певний проміжок часу

Якщо точка рухається прямолінійно і її швидкість  $v=v(t)$  є відома функція часу, то шлях, який пройшла точка за проміжок часу  $[t_1; t_2]$ , обчислюється формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

**Приклад 1.** Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю  $v = 0,1t^3$  м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за 10 с.

*Розв'язання:* Використовуючи формулу знаходимо:

$$S = \int_0^{10} 0,1t^3 dt = 0,1 \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_0^{10} = \frac{1}{40} \cdot 10^4 = 250(\text{м})$$

### 2. Обчислення роботи

Нехай під дією сили  $F = F(x)$  матеріальна точка рухається уздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота  $A$ , виконана цією силою при переміщенні точки на відрізок  $[a; b]$ , обчислюється за формулою  $A = \int_a^b F(x) dx$ .

**Приклад 2.** Обчислити роботу сили, яка потрібна при стисканні пружини на 0,08м, якщо для стискання її на 1 см, потрібна сила 10Н.

*Розв'язання:* Згідно закону Гука, сила  $F$ , яка розтує чи стискає пружину на  $x$  метрів, дорівнює  $F=kx$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Отже,

$$10=0,01k, \text{ тобто } k=1000, \text{ звідси } F=1000x.$$

Шукану роботу знаходимо за формулою:

$$A = \int_0^{0,08} 1000x dx = 1000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,08} = 500x^2 \Big|_0^{0,08} = 500 \cdot 0,08^2 - 0 = 3,2 (\text{Дж})$$

### 3. Сила тиску рідини

Сила тиску рідини густиною на вертикальну пластину, занурену в рідину, обчислюється за формулою:

$$P = \rho g \int_a^b S dx,$$

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$  - прискорення вільного падіння,  $S$  - площа пластинки, а глибина занурення пластинки змінюється від  $a$  до  $b$ .

**Приклад 3.** Обчислити силу тиску води на одну із стінок акваріума, довжиною  $30\text{см}$  і висотою  $20\text{см}$ .

*Розв'язання:* Стінка акваріума має форму прямокутника, тому  $S = 0,3x$ , де  $0 \leq x \leq 0,2$ . Густина води дорівнює  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Тоді сила тиску води на стінку акваріума, обчислюється за формулою:

$$P = 1000 \cdot 9,8 \int_0^{0,2} 0,3x dx = 9800 \cdot 0,3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,2} = 9800 \cdot 0,3 \cdot 0,02 = 58,8 \text{ (Н)}$$

#### 4. Обчислення маси неоднорідного стержня

Маса однорідного стержня довжиною  $[a; b]$ , густина якого змінюється за законом  $\rho = \rho(x)$ , знаходиться за формулою

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

**Приклад 4.** Обчисліть масу ділянки стержня від  $a=1$  до  $b=2$ , якщо його лінійна щільність задається формулою  $\rho(x) = 4x^3 + 5x + 2 \text{ (г/см)}$ .

*Розв'язання:* Знаходимо масу ділянки стержня за формулою:

$$m = \int_1^2 (4x^3 + 5x + 2) dx = x^4 + \frac{5x^2}{2} + 2x \Big|_1^2 = 16 + 10 + 4 - 1 - \frac{5}{2} - 2 = 24,5 \text{ (г)}.$$

#### 5. Величина заряду, що переноситься за певний проміжок часу через переріз провідника

Якщо сила струму змінюється за законом  $I=I(t)$ , то величина заряду  $q$ , що переноситься за проміжок часу  $[t_1; t_2]$  через переріз провідника знаходиться за формулою:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

**Приклад 5.** Протягом  $7\text{с}$  величина струму в провіднику змінювалася за законом  $I(t) = 3t^2 + 2t \text{ (А)}$ . Знайдіть кількість електрики, що пройшла через провідник за цей час.

*Розв'язання:* За формулою маємо:

$$q = \int_0^7 (3t^2 + 2t) dt = t^3 + t^2 \Big|_0^7 = 49 \cdot 8 = 392 \text{ (Кл)}.$$

#### 6. Обсяг випущеної продукції

Обсяг виробленої продукції деяким підприємством або фірмою з продуктивністю праці  $f=f(t)$  за інтервал часу  $[0; T]$  знаходиться за формулою:

$$q = \int_0^T f(t) dt$$

**Приклад 6.** Продуктивність праці деякого підприємства протягом робочого дня описується функцією:

$$f(t) = \begin{cases} -2t^2 + 9t, & 0 \leq t \leq 4, \\ 0, & 4 < t < 5, \\ -2t^2 + 26t - 30, & 5 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

де  $t$  – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, виробленої за весь робочий день.

*Розв'язання:* Обсяг продукції визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \int_0^4 (9t - 2t^2) dt + \int_5^8 (26t - 2t^2 - 30) dt &= \left( 9 \cdot \frac{t^2}{2} - 2 \cdot \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^4 + \left( 26 \cdot \frac{t^2}{2} - 2 \cdot \frac{t^3}{3} - 30t \right) \Big|_5^8 = \\ &= \frac{9 \cdot 16}{2} - \frac{2 \cdot 64}{3} + 13 \cdot 64 - \frac{2 \cdot 512}{3} - 30 \cdot 8 - 13 \cdot 25 + \frac{2 \cdot 125}{3} + 30 \cdot 5 = 188 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 7.** Експериментально встановлено, що залежність витрати бензину автомобілем від швидкості на 100 км шляху визначається формулою:  $Q = 18 - 0,3v + 0,003v^2$ , де  $30 \leq v \leq 110$ . Визначити середню витрату бензину при швидкості руху 50-60 км/год.

*Розв'язання:* Середня витрата бензину становить

$$\begin{aligned} m &= \frac{\int_{50}^{60} (18 - 0,3v + 0,003v^2) dv}{60 - 50} = \frac{18v - 0,3 \cdot \frac{v^2}{2} + 0,003 \cdot \frac{v^3}{3} \Big|_{50}^{60}}{10} = \\ &= \frac{1}{10} (18 \cdot 60 - 0,3 \cdot 1800 + 0,003 \cdot 72000 - 18 \cdot 50 + 0,3 \cdot 1250 - 0,003 \cdot 41667) = 10,6 (\text{л}) \end{aligned}$$

Отже, автомобіль на 100 км шляху, рухаючись зі швидкістю 50-60 км/год, витрачає в середньому 10,6 л бензину.

## Контрольні питання

1. Назвати відомі вам застосування інтеграла.
2. Як за допомогою інтеграла обчислити шлях, який пройде точка за певний проміжок часу?
3. Як обчислити роботу змінної сили за допомогою інтеграла?
4. Як за допомогою інтеграла обчислити масу неоднорідного стержня за лінійною густиною?
5. Як знайти величину заряду, що переноситься за певний проміжок часу через поперечний переріз за допомогою інтеграла?
6. Як за допомогою інтеграла знайти обсяг випущеної продукції за певний час, якщо задано функцію продуктивності праці?

*Завдання на практичну роботу №9. Застосування інтеграла до розв'язування задач з фізики і економіки*

1. Розв'язати задачу:

1) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$$f(t) = \frac{2}{3t+5} + 3, \text{ де } t - \text{ час, що відлічується від початку робочого дня.}$$

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за першу годину робочого дня.

2) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$$f(t) = 12 - \sqrt{x+3}, \text{ де } t - \text{ час, що відлічується від початку робочого дня.}$$

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

3) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$$f(t) = \frac{3}{4t+5} + 5, \text{ де } t - \text{ час, що відлічується від початку робочого дня.}$$

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 4 години робочого дня.

4) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$$f(t) = 10t - 2t^2 + 3, \text{ де } t - \text{ час, що відлічується від початку робочого дня.}$$

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

5) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$$f(t) = \frac{4}{t+5} + 3, \text{ де } t - \text{ час, що відлічується від початку робочого дня.}$$

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 2 години робочого дня.

6) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$$f(t) = 16 - 4\sqrt{t+3}, \text{ де } t - \text{ час, що відлічується від початку робочого дня.}$$

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 3 години робочого дня.

- 7) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією  $f(t) = 10t - 2t^2 + 1$ , де  $t$  – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.
- 8) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією  $f(t) = \frac{6}{2t+3} + 1$ , де  $t$  – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 4 години робочого дня.
- 9) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією  $f(t) = 10t - 2t^2 + 5$ , де  $t$  – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 3 години робочого дня.
- 10) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією  $f(t) = 8t - t^2 + 2$ , де  $t$  – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.
- 11) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією  $f(t) = 10 - 3\sqrt{t+2}$ , де  $t$  – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за першу годину робочого дня.
- 12) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією  $f(t) = 9t - t^2 + 1$ , де  $t$  – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 2 години робочого дня.
- 13) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією  $f(t) = \frac{4}{2t+3} + 1$ , де  $t$  – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

14) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$$f(t) = \frac{5}{6t+3} + 1, \text{ де } t - \text{ час, що відлічується від початку робочого дня.}$$

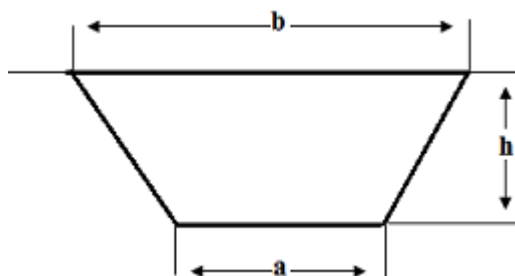
Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за перші 3 години робочого дня.

15) Продуктивність праці робітника протягом дня задана функцією

$$f(t) = 9 - 2\sqrt{t+2}, \text{ де } t - \text{ час, що відлічується від початку робочого дня.}$$

Визначити обсяг продукції, що виготовляється робітником за весь восьмигодинний робочий день.

2. Обчислити силу, з якою вода тисне на плотину, якщо переріз плотины має форму рівнобічної трапеції. Питома вага води  $1 \text{ т/м}^2$ .



- 1)  $a = 4,4 \text{ м}, b = 6,6 \text{ м}, h = 3 \text{ м}.$
- 2)  $a = 5,1 \text{ м}, b = 7,8 \text{ м}, h = 3 \text{ м}.$
- 3)  $a = 5,7 \text{ м}, b = 9,0 \text{ м}, h = 4 \text{ м}.$
- 4)  $a = 6,3 \text{ м}, b = 10,2 \text{ м}, h = 4 \text{ м}.$
- 5)  $a = 6,9 \text{ м}, b = 11,4 \text{ м}, h = 5 \text{ м}.$
- 6)  $a = 4,1 \text{ м}, b = 5,6 \text{ м}, h = 3 \text{ м}.$
- 7)  $a = 6,1 \text{ м}, b = 7,5 \text{ м}, h = 4 \text{ м}.$
- 8)  $a = 6,7 \text{ м}, b = 8,0 \text{ м}, h = 5 \text{ м}.$
- 9)  $a = 5,3 \text{ м}, b = 9,2 \text{ м}, h = 4 \text{ м}.$
- 10)  $a = 5,9 \text{ м}, b = 10,4 \text{ м}, h = 5 \text{ м}.$
- 11)  $a = 5,2 \text{ м}, b = 7,9 \text{ м}, h = 4 \text{ м}.$
- 12)  $a = 5,8 \text{ м}, b = 9,2 \text{ м}, h = 5 \text{ м}.$
- 13)  $a = 6,5 \text{ м}, b = 10,4 \text{ м}, h = 5 \text{ м}.$
- 14)  $a = 6,6 \text{ м}, b = 10,4 \text{ м}, h = 6 \text{ м}.$
- 15)  $a = 5,5 \text{ м}, b = 7,9 \text{ м}, h = 4 \text{ м}.$

### 3. Розв'язати задачу фізичного змісту:

- 1) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=5c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 2t^2 + t - 3 \text{ (м/с)}.$$
- 2) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=3c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 3t^2 + 2t - 1 \text{ (м/с)}$$
- 3) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=4c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 3t^2 - 5t + 2 \text{ (м/с)}$$
- 4) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=5c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 2t^2 - t + 5 \text{ (м/с)}$$
- 5) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=4c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 3t^2 + 2t - 1 \text{ (м/с)}$$
- 6) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=5c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 2t^2 - t + 3 \text{ (м/с)}$$
- 7) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=4c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 9t\sqrt{t} + 1 \text{ (м/с)}$$
- 8) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=3c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 6t^2 - \sqrt{t} \text{ (м/с)}$$
- 9) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=4c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
$$v(t) = 5t^2 - 2t \text{ (м/с)}$$



- 10) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=5c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
 $v(t) = 3t^2 \sqrt{t} + 8$  (м/с)
- 11) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=6c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
 $v(t) = 5t^2 + 3$  (м/с)
- 12) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=7c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
 $v(t) = 3t^2 + 2t$  (м/с)
- 13) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=10c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
 $v(t) = 5t^2 + 2t + 3$  (м/с)
- 14) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=5c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  $v(t) = t^3 - t$  (м/с)
- 15) Знайдіть шлях, що пройде матеріальна точка за вказаний час  $t=4c$  від початку руху, якщо швидкість змінюється за законом  
 $v(t) = 5t\sqrt{t} - 3t + 2$  (м/с)

4. Розв'яжіть задачу:

- 1) Стискання гвинтової пружини  $x$  пропорційне прикладеній силі. Обчислити роботу при стисканні пружини на  $0,12m$ , якщо сила  $60H$  стискає її на  $0,02m$ .
- 2) Ресора прогинається під навантаженням у  $1,5t$  на  $1cm$ . Яку роботу необхідно витратити для деформування ресори на  $3cm$ ?
- 3) Знайдіть масу стержня довжиною  $10cm$ , якщо лінійна щільність змінюється за законом  $\mu = 6 + 0,3x$ , де  $\mu$  – лінійна щільність (кг/м),  $x$  – відстань від довільної точки стержня до одного з його кінців (м).
- 4) Стискання гвинтової пружини  $x$  пропорційне прикладеній силі. Обчислити роботу при стисканні пружини на  $0,1m$ , якщо сила  $70H$  стискає її на  $0,02m$ .

- 5) Стискання гвинтової пружини  $x$  пропорційне прикладеній силі.  
Обчислити роботу при стисканні пружини на  $0,04\text{м}$ , якщо сила  $10\text{Н}$  стискає її на  $0,01\text{м}$ .
- 6) Стискання гвинтової пружини  $x$  пропорційне прикладеній силі.  
Обчислити роботу при стисканні пружини на  $0,06\text{м}$ , якщо сила  $20\text{Н}$  стискає її на  $0,01\text{м}$ .
- 7) Яку потрібно виконати роботу, щоб розтягнути пружину на  $3\text{см}$ , якщо сила в  $10\text{Н}$  розтягує пружину на  $1\text{см}$ ?
- 8) Яку роботу треба виконати для стиснення пружини на  $4\text{см}$ , якщо відомо, що сила  $2\text{Н}$  стискає цю пружину на  $1\text{см}$ ?
- 9) Обчисліть величину заряду, що переноситься через поперечний переріз провідника за  $20\text{с}$ , якщо сила струму змінюється за законом  $I(t) = 2t + 1 (\text{А})$ .
- 10) Знайдіть масу неоднорідного стержня довжиною  $40\text{см}$ , якщо його лінійна густина змінюється за законом  $\rho(x) = 2x^2 + 1 (\text{кг/м})$ .
- 11) Обчисліть роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з ями глибиною  $4\text{м}$ , що має квадратний переріз із стороною  $2\text{м}$ . Густина води  $\rho(x) = 1000 \text{ кг/м}^3$ .
- 12) Знайти масу стержня довжиною  $35\text{см}$ , якщо його лінійна густина змінюється за законом  $\rho(x) = 4x + 1 (\text{кг/м})$ .
- 13) Знайти кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за  $10\text{с}$ , якщо сила струму змінюється за законом  $I(t) = 4t^2 + 1 (\text{А})$ .
- 14) Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб розтягнути пружину на  $0,06\text{м}$ , якщо сила  $12\text{Н}$  розтягує її на  $0,01\text{м}$ .
- 15) Знайдіть масу неоднорідного стержня довжиною  $25\text{см}$ , якщо його лінійна густина змінюється за законом  $\rho(x) = 2x^2 + x + 2 (\text{кг/м})$ .