Практична робота 8. **Визначений інтеграл та його застосування**
Мета. Виробити практичні навички знаходження визначених інтегралів на основі правил та формул інтегрування, вміння застосовувати інтеграл.

1. Обчислення визначеного інтеграла

В основі обчислення визначеного інтеграла лежить формула Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$,

де *F(x)* – первісна функції *f(x)*.

Приклад 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}$$

Властивості визначеного інтеграла:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0,$

   $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a;b],$

5. $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$ де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції *f(x)* на відрізку $[a,b]$.

Приклад 2.

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x}\right)dx = \left(3arctgx + \frac{5}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 = 3arctg1 + 2{,}5e^2 - 3atctg0 + 2{,}5e^0 =$$

$$= \frac{3\pi}{4} + 2{,}5e^2 + 2{,}5.$$

Розглянуті в попередній темі методи інтегрування частинами і заміни змінної переносяться і на випадок невизначеного інтеграла. Інтегрування частинами здійснюється за допомогою формули:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Даний метод застосовують до тих же функцій, що й у випадку невизначеного інтеграла.

Приклад 3. Обчислити $\int_0^2 xe^{3x}dx$

Розв'язання:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{3x} \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$\int_0^2 xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{9}e^6 - 0 + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}e^6 + \frac{1}{9}.$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі оснований на формулі

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi`(t)dt.$$

Тут нова змінна введена підстановкою $x = \varphi(t),$ а нові межі інтегрування α і β визначаються рівностями $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$

Приклад 4. Обчислити $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

Розв'язання:

$x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt,$

$x = 1 \Rightarrow t = 1,\ x = 4 \Rightarrow t = 2$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)} = \int_1^2 \frac{2tdt}{t(t+1)} = 2\int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1|\Big|_1^2 = 2\ln 3 - 2\ln 2 = 2\ln 1{,}5.$$

2. Площа плоскої фігури.

Площі плоских фігур, зображених на рисунках 1 і 2, обчислюються за формулами:

$$S = \int_a^b f(x)dx, \qquad (f(x) \ge 0),$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx, \qquad (f_2(x) \ge f_1(x)).$$

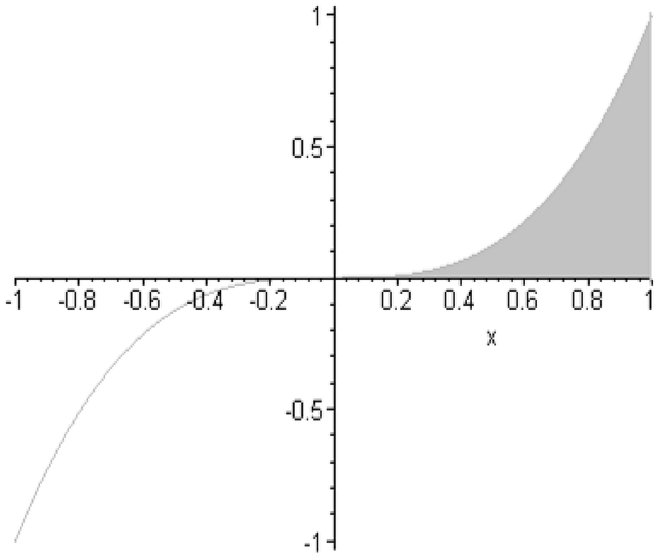
Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^3, y = 0, x = 1;$

б) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = x$

Розв`язання:

а) Побудуємо графіки всіх заданих рівнянь, одержимо фігуру, площу якої потрібно знайти.

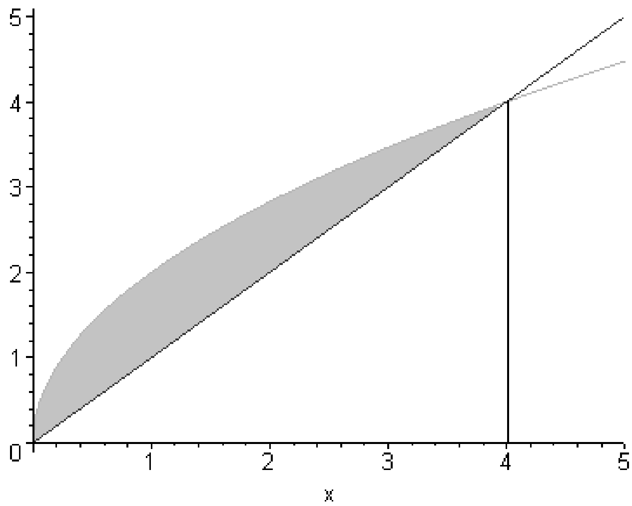


Підінтегральна функція f(x) визначається рівнянням лінії, яка обмежує криволінійну трапецію зверху, тому площу знайдемо за формулою:

$$S = \int_0^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

б) Зобразимо графіки функцій на системі координат, одержимо фігуру, площу якої треба знайти. Знайдемо точки перетину графіків:

$$2\sqrt{x} = x$$
$$4x = x^2$$
$$x(4 - x) = 0$$
$$x = 0;\ x = 4.$$



Отже, площу фігури знаходимо за формулою:

$$S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - x\right) dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \Bigg|_0^4 =$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^2 \Bigg|_0^4 = \frac{4}{3} \cdot 8 - 8 - 0 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

3. Довжина дуги

Довжина дуги *l* лінії *y=f(x),* $x \in [a;b]$ обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $t \in [\alpha; \beta]$

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, то довжина дуги знаходиться за формулою:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Приклад 6. Обчислити довжину дуги параболи $y=\frac{1}{2}x^2,\ x\in[0;1]$.

Розв`язання:

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Приклад 7. Знайти довжину дуги астроїди:

$$\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases},\ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

Розв`язання:

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\left(2\cos^3 t\right)'\right)^2+\left(\left(2\sin^3 t\right)'\right)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(6\cos^2 t(-\sin t)\right)^2+\left(6\sin^2 t\cos t\right)^2}dt=$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\cos t\sin t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos 2t dt=-\frac{3}{2}\sin 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3}{2}(-1-1)=3.$$

4. Обчислення об'єму тіла обертання та площі поверхні обертання

Розглянемо криволінійну трапецію обмежену лінією і двома прямими . Обертаючи цю фігуру навколо осі OX, одержимо деяке тіло. Об'єм даного тіла обчислюється за формулою:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

А площа поверхні обертання за формулою:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Приклад 8. Обчислити об'єм тіла, одержаного при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=x^3,\ y=0,.\ x=1$.

Розв`язання:

Об’єм тіла знаходимо за формулою $V=\pi\int\limits_0^1\left(x^3\right)^2dx=\pi\int\limits_0^1 x^6dx=\pi\cdot\left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1=\frac{\pi}{7}$.

Приклад 9. Обчислити площу поверхні, одержаної обертанням відрізка прямої $y=2x+1 \quad (0\le x\le 2)$ навколо осі Ох.

Розв`язання: $S=2\pi\int\limits_0^2(2x+1)\sqrt{1+2^2}\,dx=2\sqrt{5}\pi\left.\left(x^2+x\right)\right|_0^2=12\sqrt{5}\pi$.

Контрольні питання

1. Дайте означення визначеного інтегралу.
2. Перерахуйте основні властивості визначеного інтегралу.
3. В чому полягає геометричний зміст визначеного інтегралу?
4. Напишіть формулу для визначення площі плоскої фігури за допомогою визначеного інтегралу.
5. За якою формулою знаходиться об’єм тіла обертання?

Завдання на практичну роботу №6. **Визначений інтеграл та його застосування**

1. Обчислити визначені інтеграли:

1) а)	$\int_0^1 x^6\left(1+x^7\right)dx,$	$\int_0^1 x\cdot 2^x\,dx$	$\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$
2)	$\int_0^1 x^4\left(x^5-1\right)^6 dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2-x^2\right)\sin x dx$	$\int_1^{256}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+4\sqrt[8]{x}}$
3)	$\int_0^1 x^8\left(1+x^9\right)^5 dx$	$\int_0^1 x^2e^{2x}dx$	$\int_1^{64}\frac{dx}{4\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$
4)	$\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2-5x\right)\sin x dx$	$\int_1^{64}\frac{dx}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$
5)	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$	$\int_0^1 xe^{5x}dx$	$\int_1^{64}\frac{dx}{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
6)	$\int_0^1\frac{dx}{1+2x}$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2+3x\right)\sin 2x dx$	$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$
7)	$\int_0^1 x^7\left(1+x^8\right)dx$	$\int_0^1 x^2\cdot 4^x\,dx$	$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}}$
8)	$\int_0^1\frac{dx}{\left(3x+1\right)^2}$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 4x dx$	$\int_1^{16}\frac{dx}{3\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$
9)	$\int_0^1 x^3e^{x^4}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{5}} x\cos 5x dx$	$\int_1^{16}\frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$
10)	$\int_0^1 x^5\left(x^6-1\right)dx$	$\int_1^2 x^2\ln 3x dx$	$\int_1^{256}\frac{dx}{3\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x}}$
11)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2tg^2 x dx}{\cos^2 x}$	$\int_1^2 x^3\log_4 2x dx$	$\int_1^{256}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+4\sqrt[8]{x^2}}$
12)	$\int_0^1\frac{x^5dx}{4+x^6}$	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 6x dx$	$\int_1^{256}\frac{dx}{3\sqrt[4]{x}+4\sqrt[8]{x}}$
13)	$\int_0^1 x^4 3^{x^5}dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+3x\right)\cos 3x dx$	$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+6\sqrt[4]{x}}$
14)	$\int_0^1 x^8\left(x^9-1\right)^7 dx$	$\int_0^1\left(1+2x\right)e^{4x}dx$	$\int_1^{16}\frac{dx}{4\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}$
15)	$\int_0^1 x^7\left(x^8-1\right)^5 dx$	$\int_1^2 x^9\ln 2x dx$	$\int_1^{256}\frac{dx}{6\sqrt[4]{x}+5\sqrt[8]{x}}$

2. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

1) $y=\sqrt{x},\ y=2-x,\ y=0$

2) $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{-x},\ y=1$

3) $y=\sqrt{x},\ y=\frac{1}{2}x$

4) $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ y=2$

5) $y=x^3,\ y=2-x,\ y=0$

6) $y=x^2,\ y=x+2$

7) $y=x^2,\ y=x+6$

8) $y=x^3,\ y=-x,\ y=1$

9) $y=x^2,\ y=x,\ x=2$

10) $y=-x^2,\ y=x-2$

11) $y=x^2,\ y=x,\ x=2$

12) $y=-x^2,\ y=-x^3$

13) $y=x^3,\ y=-x,\ x=1$

14) $y=x^3,\ y=-x,\ x=-1$

15) $y=x^3,\ y=-x,\ y=-1$