Практична робота 6. **Безпосереднє інтегрування. Інтегрування підстановкою. Інтегрування по частинах**

Мета. Розвинути практичні навички знаходження невизначених інтегралів, вміння вибирати метод інтегрування

1. Означення й властивості первісної та невизначеного інтегралу

Основна задача диференціального числення полягає в тому, що за деякою функцією треба знайти її похідну, якщо така існує. Основною задачею інтегрального числення є обернена задача: за похідною функції знайти саму функцію. Прикладні задачі, де застосовують цей математичний апарат, пов'язані із знаходженням функції за інформацією про її кутовий коефіцієнт, дотичну, нормаль, задача на знаходження маси стержня за його густиною, та ін.

Функція $y = F(x)$ *називається первісною* для функції $y = f(x)$ на деякому інтервалі $[a,b]$, якщо $F'(x) = f(x),$ для будь-якого х з проміжку $[a,b]$.

Приклад 1. Якщо $f(x) = x^3,$то $F(x) = \frac{x^4}{4},$ бо $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3.$ Також $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1,$ бо $\left(\frac{x^4}{4} + 1\right)' = x^3$ і взагалі $F(x) = \frac{x^4}{4} + C \quad C \in R.$ Це є загальний вигляд первісною для $f(x) = x^3.$

Теорема 1 (про загальний вигляд первісних).

1. Якщо *F(x)* – первісна для *f(x)* на деякому проміжку, то $F(x) + C, \ C \in R,$ також є первісною для *f(x)* на цьому проміжку.

Невизначеним інтегралом від деякої функції називається множина всіх первісних функцій, тобто $\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x).$

Тут f(x) – інтегральна функція, $f(x)dx$ *- підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування, C – довільна стала*

Операція знаходження $F(x) + C$ за даною *f(x)* називається *інтегруванням f(x).*

Приклад 2.

1) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$, бо $\left(x^6 + C\right)' = x^5$, $x \in R$;

2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, бо $(-\cos x + C)' = \sin x,\ x \in R$;

3) $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$, бо , $\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)' = e^{2x},\ x \in R.$.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
2. $\int d(F(x)) = F(x) + C.$
3. $\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)dx,\ \ c \in R.$
4. $\int \left(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx.$
5. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F\left(kx+b\right) + C$

2. Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
5. $\int e^x du = e^x + C.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
13. $\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C.$

Безпосереднє інтегрування

Під безпосереднім інтегруванням розуміють такий спосіб знаходження інтегралу, коли шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції та застосування властивостей невизначеного інтегралу зводимо даний інтеграл до табличних інтегралів.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{3dx}{x^2}$.

Розв'язання: Використаємо властивість степеня з відємним показником $\frac{1}{a^n} = a^{-n}, a > 0$ і знайдемо невизначений інтеграм від степеневої функції:

$$\int \frac{3dx}{x^2} = 3\int x^{-2}dx = \frac{3x^{-2+1}}{-2+1} + C = -3x^{-1} + C = -\frac{3}{x} + C.$$

Відповідь: $\int \frac{3dx}{x^2} = -\frac{3}{x} + C$.

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}}$.

Розв'язання: Використаємо властивість степеня з дробовим показником $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{\sqrt{x}} + C.$$

Відповідь: $\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} + C.$

Приклад 5. Знайти інтеграл: $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$.

Розв'язання: Відкриємо дужки за формулою: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)dx = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C.$$

Відповідь: $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$.

Приклад 6. Знайти інтеграл: $\int ctg^2 x dx$.

Розв'язання: Для знаходження інтегралу використаємо формулу $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ і властивості інтегралу:

$$\int ctg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -ctgx + x + C.$$

Відповідь: $\int ctg^2 x dx = -ctgx + x + C.$

1. Інтегрування методом підстановки (заміна змінної)

Суть методу підстановки полягає в наступному: заміняють новою змінною частину підінтегральної функції, при диференціюванні якої отримуємо частину, що залишилась. В результаті підінтегральний вираз набуде вигляду:
$f(t(x)) \cdot t'(x) dx = f(t) dt$.

Приклад 7. Знайти інтеграл: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}} dx$.

Розв'язання: Зробимо підстановку $t = 5 - 3x,\ dt = -3dx,\ dx = -\frac{dt}{3}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}} dx = \int \frac{-\frac{dt}{3}}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \int t^{-\frac{2}{3}} dt = -\frac{1}{3} \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -t^{\frac{1}{3}} + C = -\sqrt[3]{t} + C = -\sqrt[3]{5-3x} + C.$$

Відповідь: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}} dx = -\sqrt[3]{5-3x} + C$.

Приклад 8. Знайти інтеграл: $\int (2 + \cos x)^2 \sin x dx$.

Розв'язання: Нехай $t = 2 + \cos x,\ dt = -\sin x dx,\ \sin x dx = -dt$.

$$\int (2 + \cos x)^2 \sin x dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}(2 + \cos x)^3 + C.$$

Відповідь: $\int (2 + \cos x)^2 \sin x dx = -\frac{1}{3}(2 + \cos x)^3 + C$.

Приклад 9. Знайти інтеграл: $\int \cos\frac{x}{2} dx$.

Розв'язання: Нехай $t = \frac{x}{2},\ dt = \frac{1}{2} dx,\ dx = 2dt$.

$$\int \cos\frac{x}{2} dx = 2\int \cos t dt = 2\sin t + C = 2\sin\frac{x}{2} + C.$$

5. Інтегрування по частинах

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - диференційовані для відповідних х.

$d(uv) = vdu + udv,$ звідки $udv = d(uv) - vdu.$

Проінтегруємо останню рівність, беручи до уваги властивість інтегралів.

$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$ Це формула інтегрування частинами.

Метод інтегрування частинами застосовують при інтегруванні функцій, що містять добуток, логарифми і обернені тригонометричні функції.

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int xe^x dx$

Розв'язання:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

Інтегруємо частинами $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int x^2 \ln x dx$

Розв'язання:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \arctan 2x\,dx$

Розв'язання:

$$\arctan 2x = u \Rightarrow du = \frac{2dx}{1+4x^2}$$
$$dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$\int \arctan 2x\,dx = xarctg2x - \int \frac{2x}{1+4x^2}dx = xarctg2x - \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C$$

Контрольні питання

1. Яку дію називають інтегруванням?
2. Яку функцію називають первісною функції $f(x)$?
3. Дати означення невизначеного інтегралу?
4. Якими діями можна перевірити інтегрування?
5. Написати основні формули інтегрування.
6. Сформулюйте властивості невизначеного інтегралу.

Завдання на практичну роботу №6. **Безпосереднє інтегрування. Інтегрування підстановкою. Інтегрування по частинах.**

1. Знайти інтеграли, користуючись таблицею інтегралів і найпростішими правилами інтегрування.

1) а) $\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+5^x\right)dx$ б) $\int\left(x^5-\frac{3}{x^4}-4x\sqrt{x}\right)dx$

в) $\int\left(\sin(3x+1)+2e^{5x}\right)dx$ г) $\int\left(\frac{2}{4+9x^2}-(1-3x)^5\right)dx$

д) $\int 3x^2e^{x^3}dx$ е) $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$

2) а) $\int\left(\frac{4}{x^2-16}+\frac{3}{\sin^2 x}-3^x\right)dx$ б) $\int\left(x^3+\frac{2}{x^7}-x^2\sqrt[4]{x^3}\right)dx$

в) $\int\left(\cos(1-2x)+(5x+1)^9\right)dx$ г) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}+3e^{2x+1}\right)dx$

д) $\int 4x^3\sin x^4 dx$ е) $\int\left(x^2e^{x^2+1}+\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx$

3) а) $\int\left(\frac{2}{x^2+3}-\frac{5}{\sin^2 x}+\sin x\right)dx$ б) $\int\left(\left(2+\sqrt{x}\right)^3+\frac{1}{x^4}\right)dx$

в) $\int\left(\cos(1-3x)+2^{5x}\right)dx$ г) $\int\left(\frac{2}{9+4x^2}-\frac{5}{\cos^2 3x}\right)dx$

д) $\int 5x^4\sin x^5 dx$ е) $\int\left(x\left(5x^2+2\right)^8-\frac{tg^5 x}{\cos^2 x}dx\right)$

4) а) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{2}{\sin^2 x}+7^x\right)dx$ б) $\int\left(3x^2-x\sqrt[4]{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx$

в) $\int\left(e^{4x+1}+\frac{3}{\cos^2 3x}\right)dx$ г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{2-9x^2}}+\sin(1-5x)\right)dx$

д) $\int 7x^6\left(3+x^7\right)^5dx$ е) $\int\left(x^2\cos\left(1-4x^3\right)+\frac{3}{x\ln^5 x}\right)dx$

5) а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{3}{\cos^2 x}+e^x\right)dx$ б) $\int\left(\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^2+\frac{2}{x^5}\right)dx$

в) $\int\left((3+5x)^9-4^{1-2x}\right)dx$ г) $\int\left(\frac{2}{1+9x^2}-\frac{3}{2-4x}\right)dx$

д) $\int 6x^5 \sin(x^6+5)dx$

е) $\int\left(\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{ctg^6 x}{\sin^2 x}\right)dx$

6) а) $\int\left(\frac{2}{x}-3\sin x+2\cdot 5^x\right)dx$

б) $\int\left(x^3-\sqrt{x^3}+\frac{4}{x^9}\right)dx$

в) $\int\left(e^{3x-1}+\frac{3}{\sin^2(1-2x)}\right)dx$

г) $\int\left(\frac{3}{5+16x^2}-\cos(5x+3)\right)dx$

д) $\int 3x^2 e^{x^3}dx$

е) $\int\left(\frac{x}{5x^2-4}+\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$

7) а) $\int\left(2\cos x-\frac{2}{\sin^2 x}+4e^x\right)dx$

б) $\int\left((3-\sqrt{x})^3+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

в) $\int\left(5x^4(3+x^5)^7\right)dx$

г) $\int\left(\frac{3}{x\ln^5 x}+\frac{x^2}{\cos^2 x^3}\right)dx$

д) $\int\left(\frac{4}{3x+2}-\sin(1-4x)\right)dx$

е) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{9x^2+5}}-4^{1-3x}\right)dx$

8) а) $\int\left(\frac{1}{4+x^2}-3e^x+\frac{4}{x}\right)dx$

б) $\int\left((2x^2+1)^3-\frac{4}{x^5}\right)dx$

в) $\int\left(\sin(3x+1)-3(1-4x)^8\right)dx$

г) $\int\left(\frac{5}{4x^2-9}-3^{2-5x}\right)dx$

д) $\int 7x^6\cos x^7 dx$

е) $\int\left(\frac{x^4}{\sin^2(1+2x^5)}-\frac{tg^3 x}{\cos^2 x}\right)dx$

9) а) $\int\left(3\sin x+4^x-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$

б) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

в) $\int\left(\frac{2}{\cos^2(4x+1)}-\frac{3}{1-5x}\right)dx$

г) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-25x^2}}+(3+4x)^4\right)dx$

д) $\int\frac{5x^4}{3+x^5}dx$

е) $\int\left(x^3\cos(1-2x^4)+\frac{ctg^4 x}{\sin^2 x}\right)dx$

10) а) $\int\left(5\cdot 3^x-2\cos x+\frac{4}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$

б) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

в) $\int\left(e^{2x+3}-\frac{3}{\sin^2(1-2x)}\right)dx$

г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{9x^2+7}}-\frac{2}{\sqrt{3-5x}}\right)dx$

д) $\int 9x^8(1+x^9)^3 dx$

е) $\int\left(\frac{2^x}{3+2^x}+\frac{x^3}{\cos^2(x^4+1)}\right)dx$

11) а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{\sin^2 x}-4^x\right)dx$ б) $\int\left(\frac{5}{x^3}-x^6+2x^2\sqrt{x}\right)dx$

в) $\int\left(\cos(4x-3)+3e^{3x}\right)dx$ г) $\int\left(\frac{5}{4x^2+9}+(5x-3)^4\right)dx$

д) $\int 4x^3e^{x^4}dx$ е) $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

12) а) $\int\left(5^x-\frac{2}{x^4-4}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$ б) $\int\left(x\sqrt{x}+2x^4+\frac{3}{x^6}\right)dx$

в) $\int\left((2-7x)^5+3\sin(3+4x)\right)dx$ г) $\int\left(e^{2+5x}-\frac{2}{\sqrt{1-9x^2}}\right)dx$

д) $\int 5x^4\cos x^5dx$ е) $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

13) а) $\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{4}{5+x^2}-5\sin x\right)dx$ б) $\int\left(\left(3-\sqrt[2]{x}\right)^2-\frac{3}{x^2}\right)dx$

в) $\int\left(5^{2x}-3\sin(2-5x)\right)dx$ г) $\int\left(\frac{3}{\sin^2 4x}+\frac{7}{4+9x^2}\right)dx$

д) $\int 6x^5\cos x^6dx$ е) $\int\left(\frac{2tg^2x}{\cos^2 x}+x^2\left(3x^3+5\right)^9\right)dx$

14) а) $\int\left(5^x+\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{6}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx$ б) $\int\left(x\sqrt[5]{x}+5x^3-\frac{3}{x^7}\right)dx$

в) $\int\left(\frac{4}{\sin^2 2x}-5e^{2-3x}\right)dx$ г) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3-4x}}+3\cos(6x+1)\right)dx$

д) $\int 8x^7\left(5+x^8\right)^5dx$ е) $\int\left(\frac{2}{x\ln^3 x}+3x^3\sin\left(2x^4+1\right)\right)dx$

15) а) $\int\left(3e^x+\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{5}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx$ б) $\int\left(\frac{1}{x^6}-\left(1+\sqrt{x}\right)^3\right)dx$

в) $\int\left(5^{2-3x}+(2-x)^7\right)dx$ г) $\int\left(\frac{5}{3-5x}+\frac{4}{1+16x^2}\right)dx$

д) $\int 7x^6\cos\left(3+x^7\right)dx$ е) $\int\left(\frac{2ctg^5x}{\sin^2 x}-\frac{3x}{\sqrt{4-9x^2}}\right)dx$

2. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами

1) а) $\int xe^{2x}dx$ б) $\int\left(x^2+1\right)\cos xdx$

2) а) $\int x\sin 3xdx$; б) $\int x^2e^{2x}dx$

3) а) $\int (2x+1)\cos x dx$ б) $\int x^2 3^x dx$

4) а) $\int x \cdot 2^x dx$ б) $\int x^2 \sin 3x dx$

5) а) $\int xe^{5x} dx$ б) $\int (1-2x^2)\cos 2x dx$

6) а) $\int (2+3x)\sin 2x dx$ б) $\int x^2 4^x dx$

7) а) $\int x \cdot 7^x dx$ б) $\int (5+x^2)\sin 4x dx$

8) а) $\int x^2 \ln 3x dx$ б) $\int (x^2+5)e^{3x} dx$

9) а) $\int x^6 \ln 2x dx$ б) $\int x^2 \cos 6x dx$

10) а) $\int x \cdot 7^{2x} dx$ б) $\int x^2 \sin 7x dx$

11) а) $\int (2+4x)\cos 3x dx$ б) $\int (1-4x^2)e^x dx$

12) а) $\int (2-3x)\sin 5x dx$ б) $\int (1+4x^2)e^{2x} dx$

13) а) $\int (2+x)\sin 4x dx$ б) $\int x^2 \cdot 5^x dx$

14) а) $\int x \cdot 9^x dx$ б) $\int (1-7x^2)\cos 2x dx$

15) а) $\int x^{10} \ln 2x dx$ б) $\int (x^2+3)e^{4x} dx$