Практична робота №5. **Розв'язування прикладних задач за допомогою похідної**

Мета. Застосування елементів диференціального числення однієї змінної до розв'язування прикладних задач.

Розглянемо кілька прикладних задач, розв'язання яких зводиться до знаходження найбільшого чи найменшого значення певної функції.

Приклад1. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом 250π *см*^{3}. Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Розв'язання:

Тут потрібно визначити радіус основи R і висоту H циліндра так, щоб при заданому об'ємі площа його повної поверхні була найменшою. Площа повної поверхні циліндра обчислюється по формулі: $S = 2\pi RH + 2\pi R^2$.

Найменше значення цієї функції і потрібно обчислити. Тому, що S є функцією двох незалежних змінних, то одну із них потрібно виключити. Відомо, що об'єм циліндра $V = \pi R^2 H = 250\pi$. Виразимо H через V:

$H = \frac{250\pi}{\pi R^2} = \frac{250}{R^2}$ тоді $S = 2\pi R \frac{250}{R^2} + 2\pi R^2 = \frac{500\pi}{R} + 2\pi R^2$.

Областю визначення функції S є додатні значення радіуса, тобто $R>0$.

Знаходимо похідну: $S' = \frac{500\pi}{R^2} + 4\pi R,$

Знайдемо критичні точки:

$$-\frac{500\pi}{R^2} + 4\pi R = 0,$$
$$4\pi R^3 = 500\pi,$$
$$R^3 = 125,$$
$$R = 5.$$

Знаходимо другу похідну:

$$S'' = \frac{500\pi\left(R^2\right)'}{R^4} + 4\pi = \frac{500\pi \cdot 2R}{R^4} + 4\pi = \frac{1000\pi}{R^3} + 4\pi.$$

Тому, що $S''(5) > 0,$ то при $R=5$ функція досягає мінімум, який і є найменшим значенням функції S. Тоді $H = \frac{250}{R^2},$ або $H = \frac{250}{25} = 10.$

Отже, на виготовлення циліндричного бака витрачається найменша кількість матеріалу, якщо довжина радіуса основи циліндра дорівнює *5см*, а висота циліндра – *10см*.

Приклад 2. Потрібно виготовити ящик з кришкою, сторони основ якого відносяться як один до двох, а площа повної поверхні *108 см*^{2}. Якими повинні бути його розміри, щоб його об'єм був найбільшим?

Розв'язання: Тут потрібно визначити сторони основ a і b та висоту H прямокутного паралелепіпеда, щоб при заданій площі повної поверхні його об'єм був найбільшим.

За умовою: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, звідки $a=x$, $b=2x.$ Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює $V=a\cdot b\cdot H$, або $V=2x^2\cdot H$. Потрібно виключити змінну H. Відомо що $S=108см^2$ $і$ $S=2S_{осн.}+S_{біч}$; $S_{біч.}=P_{осн.}\cdot H$.

Маємо:

$$S=2x\cdot 2x+(x+2x)\cdot 2H=4x^2+6x\cdot H;$$
$$4x^2+6x\cdot H=108;$$
$$6x\cdot H=108-4x^2;$$
$$H=\frac{108-4x^2}{6x}=\frac{106}{6x}-\frac{4x^2}{6x}=\frac{18}{x}-\frac{2}{3}x,\ тоді$$
$$V=2x^2\left(\frac{18}{x}-\frac{2}{3}x\right)=36x-\frac{4}{3}x^3.$$

Дослідити дану функцію за допомогою похідної:

Областю визначення функції V є додатні значення x, тобто $x>0$.

Знаходимо похідну: $V'=36-\frac{4}{3}3x^2=36-4x^2;\ при\ V'=0; 4x^2=36; x^2=9; x=3.$

Знаходимо другу похідну: $V''=-8x;\ V''(3)<0,$ тобто при $x = 3$ функція має максимум, який і буде найбільшим значенням функції. Тоді:

$$H=\frac{18}{3}-\frac{2}{3}\cdot 3=6-2=4.$$

Відповідь: Об'єм ящика є найбільшим, якщо сторони його мають довжини *3см* і *6 см*, а висота рівна *4 см*.

Приклад 3. Число 10 розбити на два додатних доданки так, щоб сума їх кубів була найменшою.

Розв'язання: Нехай один із доданків дорівнює *x,* тоді другий доданок буде *10-x.* Сума кубів цих доданків дорівнює:

$$S = x^3 + (10 - x)^3 = x^3 + 1000 - 300x + 30x^2 - x^3;$$
$$S = 30x^2 - 300x + 1000.$$

Найменше значення цієї функції і потрібно визначити.

Областю визначення цієї функції є додатні значення *x*, тобто *x>0.*

Знаходимо похідну: $S'' = 30 \cdot 2x - 300 = 60x - 300,$ при $S'' = 0, 60x = 300, \ x = 5.$

Знайдемо другу похідну: $S'' = 60, \ S''(5) > 0,$ тобто при *x=5* функція *S* має мінімум, який і є найменшим значенням функції.

Відповідь: Число *10* потрібно розкласти на два рівних доданки: *5 і 5.*

Приклад 4. Закон прямолінійного руху тіла заданий рівнянням:

$$S = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8.$$

S – в метрах, *t* – в секундах. Знайти максимальну швидкість руху тіла.

Розв'язання: Швидкість руху тіла даний момент часу дорівнює похідній шляху *S*: $V(t) = S' = -3t + 18t - 24$

Досліджуємо цю функцію на екстремум за допомогою другої похідної:

$$V'(t) = -6t + 18, \quad V'(t) = 0; \quad t = 3c; \quad V''(t) = -6.$$

Друга похідна від'ємна; звідси слідує що швидкість є найбільшою при *t=3c.*

Максимальна швидкість руху дорівнює:

$$V(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 24 = -27 + 54 - 24 = 3$$

Відповідь: $V_{\max} = 3 м / c.$

Контрольні питання

1. Опишіть спосіб розв'язування прикладних задач.
2. Сформулюйте ознаки існування максимуму, мінімуму функції використовуючи першу похідну, другу похідну.

Завдання практичної роботи №5. **Розв'язування прикладних задач за допомогою похідної**

1. Міцність прямокутної балки пропорційна добутку її ширини на квадрат висоти. Знайти розміри найміцнішої балки, яку можна вирізати з циліндричної колоди діаметром *а см*.
2. Огорожею завдовжки *120 см* потрібно обгородити прямокутну ділянку найбільшої площі, яка прилягає до будинку. Знайти розміри такої ділянки.
3. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, вписаного в еліпс з півосями a і b.
4. Кусок дроту завдовжки l зігнути у вигляді прямокутника так, щоб площа прямокутника, була найбільшою.
5. Знайти найбільший об'єм конуса при заданій довжині l його твірної.
6. Витрати на пальне для пароплава описується залежністю $P = kV^3$, де - його швидкість. Відомо, що при швидкості *10 км/год* витрати на пальне становлять *15 грн* за год; решта витрат (що не залежать від швидкості) становлять *48 грн* за год. За якої швидкості пароплава загальна сума витрат на 1 км шляху буде найменшою?
7. З прямокутного картонового аркуша завдовжки *48см* та завширшки *30см* вирізають в кутах однакові квадрати і роблять відкриту прямокутну коробочку. Якою повинна бути сторона вирізаного квадрата, щоб об'єм коробки був найбільшим?
8. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного півколо радіуса R.
9. Число *36* розкласти на додатні множники так, щоб сума їх квадратів була найменшою.
10. З трьох дощок однакової ширини збито жолоб для подавання види. При якому куті α нахилу бічних стінок до днища жолоба площа поперечного перерізу жолоба буде найбільшою?
11. Два літаки летять в одній площині по прямих, кут між якими дорівнює 120^0, з однаковою швидкістю *v км/год*. У деякий момент часу один літак

пройшов через точку перетину ліній руху, а інший не долетів до неї на a км. Через скільки часу відстань між літаками буде найменшою і яка це відстань?

12. Розкласти число *10* на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.
13. Визначити такі розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом *32* $м^2$, щоб на облицювання його стін і дна було витрачено найменшу кількість матеріалу.
14. Сума основи і висоти трикутника дорівнює *10 см*. Якими повинні бути розміри основи, щоб площа трикутника була найбільшою?
15. Об'єм правильної чотирикутної призми *8* $дм^3$. Якою повинна бути сторона основи призми, щоб повна її поверхня була найменшою?
16. Вікно має форму прямокутника, що завершений півкругом. Периметр вікна дорівнює p. За яких розмірів вікно пропускатиме найбільше світла?
17. Знайти найбільшу площу прямокутника, що вписаний в круг радіуса r?
18. Форма поперечного перерізу заповненого водою каналу має вигляд трапеції, бічні сторони і нижня основа якої дорівнюють b *м*. Якою повинна бути верхня (більша) основа трапеції для того, щоб пропускна здатність каналу була найбільшою?
19. У кулю радіусом R вписати конус найбільшого об'єму.
20. Матеріальна точка починає рухатись вздовж осі Ox за законом $x = 6t^2 - t^3$, t – час руху точки. Яку максимальну швидкість у додатньому напрямку осі Ox досягне точка? На яку максимальну віддаль у додатному напрямку осі Ox відхилиться точка?
21. Опір балки при поздовжньому стискові пропорційний площі поперечного перетину. Знайти розміри вирізаної з круглої колоди діаметром D прямокутної балки, опір тиску якої буде найбільшим.
22. Яке додатне число, будучи доданим до оберненого числа, дає найменшу суму.
23. Периметр рівнобедреного трикутника $2p$. Якими повинні бути його сторони, щоб об'єм тіла обертання трикутника навколо основи був найбільшим?

24. Число *8* подати у вигляді суми двох доданків так, щоб сума їх кубів була найменшою.
25. Смугу бляхи завширшки *а* потрібно зігнути у вигляді відкритого циліндричного жолоба (поперечний перетин контура жолоба має форму кругового сегмента). Знайти значення центрального кута, що спирається на цю дугу, при якому місткість жолоба буде найбільшою.
26. Визначити , за якого значення діаметра d круглого отвору в греблі витрати води Q будуть мати найбільше значення, якщо $Q = cd\sqrt{h-d}$, де h - глибина нижньої точки отвору, c=const.
27. Два джерела світла розміщені на відстані *30м* одне від одного. На прямій, що з'єднує їх, знайти найменш освітлену точку, якщо сили світла джерел відносяться як *27:8* (освітленість точки обернено пропорційна квадратові відстані від точки до джерела).
28. Дротом завдовжки 20м потрібно обгородити клумбу, що має форму кругового сектора. Яким повинен бути радіус круга, щоб площа клумби була найбільшою?
29. Лампа висить над центром круглого стола, радіус якого дорівнює R. На якій висоті над столом потрібно розмістити лампу, щоб освітленість краю була найбільшою? (Освітленість точки прямо пропорційна косинусу кута падіння світла і обернено пропорційна квадратові відстані від точки до джерела).
30. Колода завдовжки *20см* має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого відповідно *2м* і *1м*. Потрібно вирізати з колоди балку з квадратним поперечним перерізом так, щоб вісь балки збігалася з віссю колоди, а об’єм балки був найбільшим. Якими повинні бути розміри балки?
31. При гальмуванні маховик за t секунд повертається на кут $\varphi = 5 + 6t - t^2$ (φ — у радіанах). Знайти: кутову швидкість ω обертання маховика в момент $t = 2c.$; момент часу t, коли обертання скінчиться.
32. Кількість тепла Q, потрібного для нагрівання1кг води від *0* до 20℃ визначається за формулою $Q(t)=t+0{,}0005t^2+0{,}000006t^3$. Обчисліть теплоємність води для t = 20℃.
33. Тіло масою m_0 рухається прямолінійно за законом $S(t)=\alpha t^2+\beta t+\lambda$. Довести, що сила, яка діє на тіло є стала.

34. Тіло масою m кг рухається за законом $x(t)$ (x – в метрах, t – в секундах). Знайти силу, що діє на тіло в момент часу t_0, якщо $m=3$, $t_0 = 2$, $x(t)=1/4\, t^4 + 1/3\, t^3 - 7\, t + 2$.
35. Знайти число, яке, будучи додане до свого квадрату, має найменшу суму.
36. Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в круг радіуса R.
37. Із всіх прямокутників, що мають периметр *20 см*, знайти той, у якого діагональ найменша.
38. Для якого числа різниця між цим числом і його квадратом найбільша.
39. Сума основи і висоти трикутника дорівнює 10см. Якими мають бути розміри основи, щоб площа трикутника була найбільшою?
40. Якими треба взяти розміри циліндричної посудини місткістю 1л, відкритої зверху, щоб на її виготовлення потрібна була найменша кількість матеріалу.
41. З дроту довжиною 120 см треба зробити модель прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою. Якою має бути сторона основи, щоб повна поверхня паралелепіпеда була найбільшою?
42. З дроту довжиною 90 см треба зробити модель призми, основою якої є правильний трикутник. Якою має бути сторона основи, щоб бічна поверхня її була найбільшою?
43. Треба виготовити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 см. Якою має бути висота лійки, щоб об’єм був найбільшим?
44. Знайти величину радіуса основи і висоту циліндра, що має об’єм 27π см^3, в якого повна поверхня найменша.
45. Треба виготовити ящик з кришкою, об’єм якого 72 дм^3, а сторони відносяться як 1:2. Якими мають бути розміри всіх його сторін, щоб повна поверхня ящика була найменшою?