Практична робота №4. **Застосування похідної**

Мета. Застосування елементів диференціального числення однієї змінної до дослідження функції, побудова графіків на основі дослідження.

1. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції

Рівняння дотичної до графіка функції *y=f(x)* в заданій точці $A(x_0;y_0)$ має вигляд: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$, а рівняння нормалі в заданій точці $A(x_0;y_0)$ – $y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

Приклад 1. Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $f(x) = x^2 + 2x - 1$ в точці $x_0=1$.

Розв'язання: $y_0 = f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$. Знайдемо похідну $f'(x) = 2x + 2$, $f'(1) = 2 + 2 = 4$.

Отже, рівняння дотичної має вигляд: $y = 2 + 4(x - 1);$ $y = 4x - 2.$

А рівняння нормалі $y = 2 - \frac{1}{4}(x - 1);$ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4} = -0.25x + 2.25$.

2. Проміжки монотонності

З допомогою похідної можна дослідити функцію, побудувати її графік, знайти найбільше і найменше значення на проміжку і т.д.

При дослідженні функції важливу роль відіграє поняття монотонності.

Функція називається монотонною, якщо вона зростає (не спадає) або спадає (не зростає) в області свого визначення. Більшість функцій є кусково-монотонними, тобто зростають (не спадають) чи спадають (не зростають) на певних проміжках.

Такі проміжки називають проміжками (інтервалами) монотонності.

Нагадаємо, що функція називається зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, і спадною – якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Тобто, якщо для $x_1 > x_2$, де x_1, x_2 належать *(a;b)* виконується умова $f(x_1) > f(x_2),$ то функція *f(x)* зростає на *(a;b)*; якщо ж виконується умова $f(x_1) < f(x_2),$ то функція *f(x)* спадає на *(a;b)*.

Для встановлення проміжків монотонності функції використовують наступну теорему:

Теорема. *(Необхідна умова монотонності)* Якщо диференційована функція $y = f(x), x \in [a;b]$, зростає (спадає) на *[a;b]*, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для будь-якого *x* з цього проміжку.

(Достатня умова монотонності) Якщо $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) в кожній точці проміжку, то функція зростає (спадає) на цьому проміжку.

3. Екстремум функції. Дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної

Точки, в яких функція змінює характер монотонності називають точками екстремуму функції.

Означення: Точка *x=a* називається точкою екстремуму для функції *f(x)*, якщо в околі цієї точки виконується одна з умов:

$f(a) > f(x)$, для всіх x з даного околу;

$f(a) < f(x)$, для всіх x з даного околу.

Якщо для точки $x = a$ виконується перша умова, то її називають точкою максимуму, якщо друга – точкою мінімуму.

Теорема. *(Необхідна умова існування екстремуму диференційованої функції)* Якщо функція $f(x)$ в точці *x=a* має екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, або не існує.

Геометрично це означає, що в точці екстремуму, дотична до графіка функції паралельна осі *OX* або її неможливо провести. Обернене твердження невірне.

Теорема *(Достатня умова існування екстремуму в точці)* Якщо при переході через точку *x=a* похідна функції $f(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то точка *x=a* є точкою мінімуму, а якщо з плюса на мінус – точкою максимуму.

З вище згаданого впиває , що точки в яких похідна рівна нулю або не існує є лише підозрілими на екстремум, або критичними точками I роду.

При дослідженні функції на екстремум слід знайти всі її критичні точки I роду і встановити знак похідної зліва і справа від них.

Схема дослідження функції $f(x)$ на екстремум за допомогою першої похідної:

- Встановити область визначення заданої функції $f(x)$;
- Визначити критичні точки функції.

  а) знайти похідну функції $f'(x)$;

  б)встановити, при яких значеннях аргументу $f'=0$ або f' не існує.
- Встановити проміжки монотонності:

  а)розбити область визначення функції критичними точками на проміжки;

  б)встановити знак похідної на кожному проміжку;

  в)зробити висновок про характер монотонності функції на кожному з проміжків;
- Визначити екстремальні точки.

Для зручності, результати дослідження оформляють у вигляді таблиці.

Приклад 2. Дослідити функцію $f(x)=x^3-3x^2$ на екстремум.

Розв'язання: Працюємо за схемою.

$D(f(x))=(-\infty;+\infty)$.

Визначимо критичні точки:

а) $f'(x)=3x^2-6x;$

б) $f'(x)=0$ при $3x^2-6x=0$; $3x(x-2)=0$; $x=0; \quad x=2$.

3. Встановимо проміжки монотонності.

x	$(-\infty;0)$	*0*	*(0;2)*	*2*	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	*0*	-	*0*	+
$f(x)$	↗	*0*	↘	*-4*	↗
		max		*min*	

4.Зробимо висновки:

а) точка *(0;0)* є точкою максимуму даної функції;

б) точка *(2;-4)* є точкою мінімуму даної функції.

4. Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної

Часто буває доцільним досліджувати функцію на екстремум за допомогою другої похідної. Розглянемо суть цього методу.

Знак першої похідної характеризує зростання і спадання функції. Знак другої похідної пов'язаний зі зростанням та спаданням першої похідної.

Якщо y' на (a; b) диференційована і зростає, то $y''>0$ на цьому ж інтервалі; якщо y' спадає на (a; b), то $y''<0$ в кожній точці цього проміжку. Перша похідна при переході через точку максимуму переходить від додатних значень до від'ємних, тобто спадає. Отже, її похідна повинна бути від'ємною.

Таким чином, в точці максимуму функції перша похідна рівна нулю, а друга похідна від'ємна.

Аналогічно можна довести, що в точці мінімуму функції друга похідна додатна. Звідси випливає достатня умова існування екстремуму функції.

Якщо в точці $x=x_0$ перша похідна функції дорівнює нулю $\left(f'(x_0)=0\right)$, а друга похідна відмінна від нуля, то $x=x_0$ - точка екстремуму.

При цьому, якщо друга похідна в цій точці додатна $\left(f''(x_0)>0\right)$, то $x=x_0$ - точка мінімуму, якщо друга похідна в цій точці від'ємна $\left(f'(x_0)<0\right)$, то $x=x_0$ - точка максимуму.

Схема дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної.

1.Знайти область визначення функції.

2.Знайти першу похідну функції і точки, в яких вона перетворюється в нуль.

3.Знайти другу похідну функції і дослідити її знак в кожній з критичних точок.

4.Визначити точки екстремуму і обчислити (якщо потрібно) значення функції.

Приклад 3. Знайти екстремум функції $f(x)=x^3-3x^2+1$.

Розв'язання:

1. Область визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $D(f)=R$.

2. Функція має похідну на всій числовій прямій, тому критичні точки визначаємо з умови $f'(x)=0$,

а) $f'(x)=3x^2-6x$,

б) $3x^2-6x=0;\qquad 3x(x-2)=0,\ x_1=0,\quad x_2=2.$

3. Знаходимо другу похідну функції

а) $f''(x)=6x-6;$

б) досліджуємо знак другої похідної в кожній критичній точці:

$$f''(0)=-6<0,\qquad f''(2)=6>0.$$

4. Отже, $x=0$ – точка максимуму, $y_{\max}=y(0)=1;$ $x=2$- точка мінімуму, $y_{\min}=y(2)=2^3-3=5.$

5. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

Неперервна на проміжку *(a;b)* функція може мати тільки одне найбільше і тільки одне найменше значення на цьому проміжку, або не мати їх зовсім.

Знаходження найбільшого і найменшого значення неперервних функцій ґрунтується на наступних властивостях цих функцій:

1. Якщо в деякому відкритому проміжку $a<x<b$ функція f(x) перервна і має тільки один екстремум і якщо це максимум, то він і є найбільшим значенням функції, а якщо мінімум – найменшим значенням функції в цьому проміжку;

2. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $a\le x\le b$, то вона обов'язково має на цьому проміжку найбільше і найменше значення. Ці значення досягаються нею в точках екстремуму, які лежать всередині відрізка, або на кінцях цього відрізка.

Схема знаходження найбільшого і найменшого значення функції на проміжку.

- Знайти екстремум функції на даному проміжку $[a;b]$.
- Знайти значення функції на кінцях проміжку *f(a)* і *f(b).*
- Із усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції

$y=\frac{x^2}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ на проміжку $[-2;4]$.

Розв'язання:

- Знайдемо екстремуми функції. Для цього знайдемо похідну функції і критичні точки першого роду.

  $y'=\frac{1}{4}4x^3-\frac{2}{3}3x^2-\frac{3}{2}2x=x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3);$

  $y'=0$ при $x_1=0;\quad x_2=-1;\quad x_3=3.$

Відмітимо критичні точки першого роду $x=-1, x=0, x=3$ на числовій прямій.

x	$(-\infty;-1)$	*-1*	*(-1;0)*	*0*	$(0;3)$	*3*	$(3;\infty)$
y'	-	*0*	+	*0*	-	*0*	+
y	↘	$\frac{17}{12}$	↗	*2*	↘	$-9\frac{1}{4}$	↗
		min		*max*		*min*	

Досліджуємо знак похідної в кожному з одержаних інтервалів

$y'(-2)<0;\quad y'(-0{,}5)>0;\quad y'(1)<0;\quad y'(4)>0.$

Таким чином (рис. 6):

$y_{\min}=y(-1)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{17}{12};$

$y_{\max}=y(0)=2;$

$y_{\min}=y(3)=\frac{1}{4}\cdot 81-\frac{2}{3}\cdot 27-\frac{3}{2}\cdot 9+2=\frac{81}{4}-18-\frac{27}{2}+2=-9\frac{1}{4}.$

- Знайдемо значення функції на кінцях проміжку:

$y(-2)=\frac{1}{4}\cdot 16+\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{3}{2}\cdot 4+2=4+5\frac{1}{3}-6+2=5\frac{1}{3};$

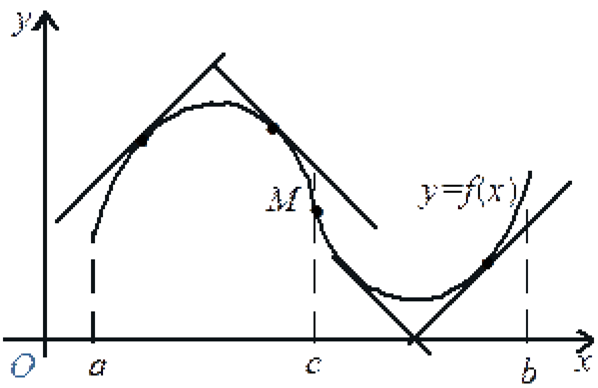
$y(4)=\frac{1}{4}\cdot 256-\frac{2}{3}\cdot 64-\frac{3}{2}\cdot 16+2=64-\frac{128}{3}-24+2=\frac{192-128-72+6}{3}=-\frac{2}{3}.$

- Отже, найбільше значення функції $y=y(-2)=5\frac{1}{3}$, а найменше значення функції $y=y(3)=-9\frac{1}{4}$.

Відповідь: $y_{найб}=y(-2)=5\frac{1}{3},\quad y_{найм}=y(3)=-9\frac{1}{4}.$

6. Опуклість і точки перегину кривої

На проміжку $a < x < b$ графік функції є опуклий вгору, якщо він лежить нижче дотичної, яка проведена в будь-якій його точці.



На проміжку $b < x < c$ графік функції є опуклий вниз, якщо він лежить вище дотичної, яка проведена в будь-якій його точці.

На проміжку опуклості графіка функції *f(x)* вгору похідна $f'(x)$ спадає (кути нахилу дотичних до графіка функції на цьому проміжку послідовно зменшується); а на проміжку опуклості вниз похідна $f'(x)$ зростає (кути нахилу дотичних до графіка функції на цьому проміжку послідовно збільшуються).

Достатня умова опуклості кривої. Графік двічі диференційованої функції $y = f(x)$ є опуклим вгору на проміжку $a < x < b$, якщо друга похідна функції від'ємна в кожній точці цього проміжку: $f''(x) < 0$ для $a < x < b$.

Графік двічі диференційованої функції $y = f(x)$ є опуклим вниз на проміжку $b < x < c$, якщо друга похідна функції додатна в кожній точці цього проміжку: $f''(x) > 0$ для $b < x < c$.

Точкою перегину неперервної функції називається точка *A*, при переході через яку графік функції змінює свою опуклість.

Необхідна умова існування точки перегину. Якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну до другого порядку включно на інтервалі *(a;b)* і точка $(x_0 f(x_0))$ є точкою перегину графіку функції $y = f(x)$, то $f''(x) = 0$.

Достатня умова існування точки перегину. Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована на (a; b) і при переході через точку $x_0 \in (a;b)$ її друга похідна змінює знак. Тоді точка кривої з абсцисою $x = x_0$ є точкою перегину.

Точками підозрілими на перегин є точки, в яких друга похідна дорівнює нулю, або не існує. Такі точки називаються *критичними точками II роду*.

Якщо при переході через критичну точку II роду $x = x_0$ друга похідна функції змінює знак то x_0 - абсциса точки перегину. Ордината точки перегину дорівнює значенню функції в точці x_0. Точка $(x_0 f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Щоб знайти напрямки опуклості і критичні точки другого роду потрібно:

- Знайти область визначення функції.
- Знайти другу похідну функції і критичні точки другого роду.
- Відмітити границі області визначення і критичні точки другого роду на числовій прямій.
- Дослідити знак другої похідної в кожному із одержаних інтервалів
- Встановити проміжки опуклості.
- Визначити абсцису точки перегину і обчислити її ординату.

Приклад5. Визначити напрямки опуклості і точки перегину функції $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2.$

Розв'язання:

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x \in R.$
2. Знайдемо другу похідну функції і критичні точки другого роду:

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 5;\ y'' = 12x^2 + 12x - 24;\ y'' = 12 \cdot (x^2 + x - 2);\ y'' = 0$ при $x^2 + x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2};\ x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

3. Відмітимо критичні точки другого роду *x = -2* і *x = 1* на числовій прямій, дані занесемо у таблицю.

x	$(-\infty;-2)$	*-2*	*(-2;1)*	*1*	$(1;\infty)$
y''	+	*0*	-	*0*	+
y	∪	*0*	∩	*5,4*	∪

4. Дослідимо знак другої похідної в кожному з інтервалів:
   $y''(-3) > 0,\quad y''(0) < 0,\quad y''(2) > 0.$
5. Крива опукла вниз при $x < -2$ і $x > 1$, крива опукла вверх при $-2 < x < 1$.

6. Знайдемо координати точок перегину $x_{т.п.} = -2,\ y_{т.п.} = y(-2) = -36;$
   $x_{т.п.} = 1,\ y_{т.п.} = y(1) = -12;$

Відповідь: Точки перегину *(-2;-36), (1;-12).*

7. Загальна схема дослідження функції і побудова їх графіків.

Для побудови графіку функції зручно користуватись схемою, в якій узагальнено матеріал даного розділу.

1. Знайти область визначення функцій.
2. Дослідити на парність, непарність та періодичність функцій.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти проміжки монотонності і екстремуми функції.
5. Знайти напрямки опуклості і точки перегину графіка функції.
6. Побудувати графік функції, використовуючи всі одержані результати досліджень.

Якщо їх виявилось недостатньо, то потрібно знайти ще декілька точок графіка функції, виходячи з її рівняння.

Приклад 6: Побудувати графік функції $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$.

Розв'язання :

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x \in R$.

Далі знаходимо $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

2. Визначимо чи функція є парною чи непарною: $y(-x) = \dfrac{-4x^3 - x^4}{5}$;

$y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$ Отже, функція є ні парною ні непарною.

3. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

$$\mathrm{OX}: \begin{cases} \mathrm{y} = 0, \\ \mathrm{x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x = 4, \end{cases} \quad OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

4. Знаходимо проміжки монотонності і екстремуми функції:

$$y' = \left(\frac{4}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^4\right)' = \frac{4}{5}3x^2 - \frac{1}{5}4x^3 = \frac{4}{5}x^2(3 - x), \quad y' = 0, \text{ при } x_1 = 0 \text{ і } x_2 = 3.$$

Відмітимо критичні точки першого роду *x=0* і *x=3* на числовій прямі і досліджуємо знак похідної в кожному із одержаних проміжків:

$y'(-1)>0,\quad y'(1)>0,\quad y'(4)<0.$ Функція зростає при *x<3* і спадає при *x>3*; *x=3* – точка максимуму.

$y_{\max}=y(3)=\frac{4\times 27-81}{5}=\frac{27}{5}=5{,}4.$ Дані запишемо в таблицю:

x	$(-\infty;0)$	*0*	*(0;3)*	*3*	$(3;\infty)$
y´	+	*0*	+	*0*	-
y	↗	*0*	↗	*5,4*	↘
				max	

5. Встановимо напрямки опуклості і точки перегину графіка функції.

$$y''=\left(\frac{12}{5}x^2-\frac{4}{3}x^3\right)'=\frac{12}{5}\cdot 2x-\frac{4}{5}\cdot 3x^2=\frac{12}{5}x(2-x).$$

$y''=0$, при $x_1=0, x_2=2.$

Відмітимо критичні точки другого роду $x=0$ і $x=2$ на числовій прямій і дослідимо знак другої похідної в кожному із одержаних інтервалів:

$y''=(-9)<0,\quad y''(1)>0,\quad y''(3)<0$.

Графік функції опуклий вниз на проміжку *(0;2)* і вгору на проміжках $(-\infty;0)$, $(2;\infty)$.

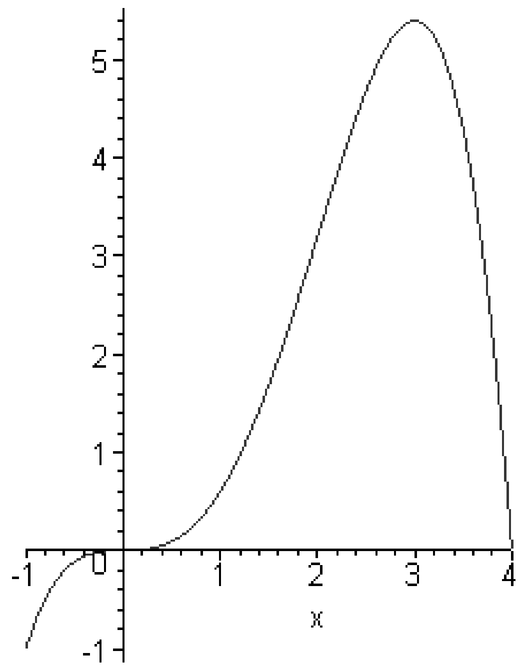
$x_{т.п.}=0,\quad y_{т.п}=y(0)=0,$

$x_{т.п.}=2,\quad y_{т.п.}=y(2)=\frac{4\cdot 8-16}{5}=\frac{16}{5}=3{,}2$

Точки перегину графіка функції *(0;0)* і *(2;3,2)*. Дані запишемо в таблицю:

x	$(-\infty,0)$	0	(0,2)	2	$(2,+\infty)$
f''	-	0	+	0	-
f	$\cap$	0	$\cup$	3,2	$\cap$

6. На основі досліджень будуємо графік



Приклад 7. Побудувати графік функції $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Розв'язання :

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x \in R$.
2. Далі знаходимо $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$. Отже, *y=1* – горизонтальна асимптота. Вертикальної асимптоти немає, оскільки функція неперервна на всій числовій прямій. Перевіримо чи графік функції має похилу асимптоту.

   $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-1)^2}{(x^2+1)x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-1)^2}{x^3+x} = 0$. Отже похилої асимптоти не має.

3. Визначимо чи функція є парною чи непарною: $y(-x) = \dfrac{(-x-1)^2}{(-x)^2+1} = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$;

$y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$ Отже, функція є ні парною ні непарною.

4. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

$\mathrm{OX}: \begin{cases} \mathrm{y} = 0, \\ \mathrm{x} = 1, \end{cases} \qquad OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

5. Знаходимо проміжки монотонності і екстремуми функції:

$$y' = \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x-1)(x^2+1)-(x-1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^2-2-2x^3+4x^2-2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$y' = 0,$ при $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$

Відмітимо критичні точки першого роду *x=-1* і *x=1* на числовій прямі і досліджуємо знак похідної в кожному із одержаних проміжків: $y'(-2) > 0, \quad y'(2) > 0, \quad y'(0) < 0.$ Функція зростає при $(-\infty;-1)$, $(1;\infty)$ і спадає при *(-1;1)* ; *x=-1* – точка максимуму, *x=1* – точка мінімуму.

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{4}{2} = 2.$$

$$y_{\min} = y(1) = \frac{0}{2} = 0.$$

Дані запишемо в таблицю:

x	$(-\infty;-1)$	*-1*	*(-1;1)*	*1*	$(1;\infty)$
y´	+	*0*	-	*0*	+
y	↗	*2*	↘	*0*	↗
		max		*min*	

6. Встановимо напрямки опуклості і точки перегину графіка функції.

$$y'' = \left(\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{4x(x^2+1)^2-(2x^2-2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}. = \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$y'' = 0$, при $x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$.

Відмітимо критичні точки другого роду $x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$ на числовій прямій і дослідимо знак другої похідної в кожному із одержаних інтервалів:

$y'' = (-9) < 0, \quad y''(1) > 0, \quad y''(3) < 0$.

Графік функції опуклий вниз на проміжку *(0;2)* і вгору на проміжках $(-\infty;0)$, $(2;\infty)$.

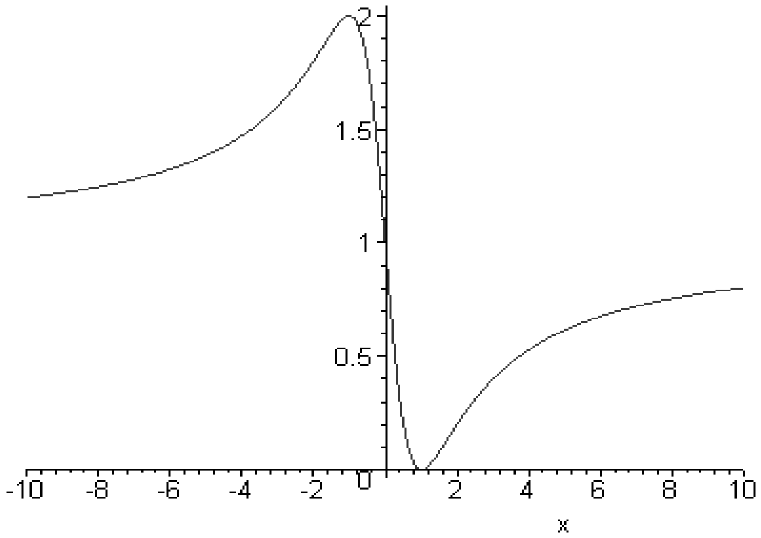
$x_{m.n.} = 0, \quad y_{m.n} = y(0) = 0,$

$$x_{m.n.} = 2, \quad y_{m.n.} = y(2) = \frac{4\cdot 8-16}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

Точки перегину графіка функції *(0;0)* і *(2;3,2)*. Дані запишемо в таблицю:

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f''	+	0	-	0	+	0	-
f	$\cap$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cup$	1	$\cap$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cap$

7. На основі досліджень будуємо графік



Контрольні питання

1. Дайте означення зростаючої і спадної функції.
2. Сформулюйте умови зростання і спадання функції.
3. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функції.
4. Сформулюйте достатні умови існування екстремуму функції.
5. Як зайти точки екстремуму?
6. Як знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку?
7. Сформулюйте достатню умову опуклості кривої.
8. Як знайти напрямки опуклості і точки перегину кривої?

Завдання на практичну роботу №4. **Застосування похідної**

1. Розв'язати задачу:

1) В яких точках лінії $y = x^2(x-2)^2$ дотичні паралельні до осі *Ox*?

2) Скласти рівняння дотичних до лінії $y = x - \frac{1}{x}$ у точках її перетину з віссю *Ox*.

3) В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 2x$ паралельна прямій $y = 2x - 1$?

4) Чи може дотична до гіперболи $y = \frac{1}{x}$ утворювати з віссю Ох гострий кут? Обґрунтуйте відповідь.

5) Скласти рівняння дотичної до параболи $y = 2x^2$ у точці *A(1;2).*

6) Скласти рівняння нормалі до параболи $y = 2x^2$ у точці *A(1;2).*

7) В якій точці параболи $y = x^2 - 3x + 5$ дотична паралельна прямій $2y + 2x - 5 = 0$?

8) Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ паралельної прямій $2y + 2x + 5 = 0$.

9) В якій точці гіперболи $y = \frac{3}{x}$ дотична перпендикулярна прямій $x - 3y - 4 = 0$?

10) Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^4 + 6x + 6$ перпендикулярної прямій $2x + 4y - 7 = 0$.

11) Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 - x + 1$, перпендикулярної до прямої $6x - 2y - 5 = 0$.

12) Скласти рівняння нормалі до гіперболи $y = \frac{x-1}{x+2}$, паралельної прямій $9x + 3y + 2 = 0$.

13) Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 - 6x + 6$, перпендикулярної до прямої, що з'єднує початок координат з вершиною параболи.

14) Скласти рівняння дотичної до кривої $y = tgx$ у початку координат.

15) Скласти рівняння нормалі до кривої $y = tgx$ у початку координат.

2. Дослідити задані функції та побудувати графіки:

1) $y=\frac{\left(x^2-4\right)^2}{16}$; 2) $y=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+5)$; 3) $y=1+x-\frac{x^4}{2}$;

4) $y=x\left(x^2-5\right)^2$; 5) $y=\frac{2x}{x^2+1}$; 6) $y=\frac{x^2}{2(x-1)}$;

7) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; 8) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$; 9) $y=\frac{x^2}{x^3+8}$;

10) $y=\frac{x^3-2x}{x^2-1}$; 11) $y=\frac{2x}{x^3-8}$; 12) $y=\frac{5x}{x^2-4}$;

13) $y=\frac{x^2-2}{x-11}$; 14) $y=\frac{x^2-4}{2x+1}$; 15) $y=\frac{x^4}{x^3-1}$.