*Практична робота №3.* **Похідна складеної функції, параметрично та неявно заданої функції**

*Мета.* Застосування елементів диференціального числення однієї змінної до дослідження функції, побудова графіків на основі дослідження.

## 1. Похідна складеної функції

Складеною функцією зазвичай називають функцію від функції.

Якщо змінна $y$ є функцією від $u$: $y=f(u)$, а $u$ в свою чергу – функцією від $x$; $u=\phi(x)$, то $y$ є складеною функцією від $x$, тобто $y=f(\phi(x))$.

Функцію $f(u)$ називають зовнішньою, а $\phi(x)$, внутрішньою функцією, або проміжною змінною.

Якщо функція $\phi(x)$ має похідну в точці $x_0$, а функція $f(u)$ – похідну в точці $u_0=\phi(x_0)$, то складена функція $y=f(\phi(x))$ також має похідну в точці $x_0$, причому $y' = f'(u)\cdot\varphi'(x)$.

Похідна складеної функції $y=f(\phi(x))$ дорівнює добутку похідної даної функції $y=f(u)$ по проміжному аргументу $u$ (позначено $f'(u)$) на похідну проміжного аргументу $u=\phi(x)$ по незалежному аргументу $x$ (позначено $\phi'(x)$).

***Приклад 1.*** Знайти похідну функції $y=\sin x^2$.

*Розв'язання*: Позначимо $u=x^2$, тоді $y=\sin u$. За формулою похідна функції дорівнює

$$y' = \left(x^2\right)'_x \cdot \left(\sin u\right)'_u = 2x\cos u = 2x\cos x^2 .$$

***Приклад 2.*** Знайти похідну функції $y=\sqrt{x^2+4x+3}$.

*Розв'язання*: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}}\cdot\left(x^2+4x+3\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}}\cdot(2x+4) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

## 2. Похідна неявно заданої функції

Функції, в яких незалежна змінна $x$ і функція $y$ зв'язані між собою формулою $f(x,y)=0$ з якої не можна відокремити саму функцію, називається неявною функцією від аргумента $x$.

Однак саму похідну від функції по змінній x можна обчислити. Для цього диференціюють функцію $f(x,y)$ по x, при цьому враховують, що сама функція залежна від змінної $y=y(x)$. З одержаного рівняння згруповують доданки, що містяться при похідній $y'$ і виражають її.

***Приклад 3.*** Знайти похідну неявно заданої функції $3^x + 3^y = 3^{x+y}$

*Розв'язання*: Продиференціюємо праву і ліву частини рівняння: $3^x \ln 3 + 3^y \ln 3 y' = 3^{x+y} \ln 3(1 + y')$

Отриманий вираз поділимо на спільний множник $ln3$ та згрупуємо доданки, що містять похідну $y'(x)$ і перенесемо їх в одну сторону за знак рівності. В результаті отримаємо $3^x - 3^{x+y} = \left(3^{x+y} - 3^y\right)y'$.

Поділивши на множник при похідній $y'(x)$ отримаємо її значення

$$y' = \frac{3^x - 3^{x+y}}{3^{x+y} - 3^y}.$$

Для спрощення винесемо із чисельника та знаменника спільні множники $3^x$ та $3^y$ відповідно. В результаті отримаємо: $y' = \frac{3^x\left(1-3^y\right)}{3^y\left(3^x - 1\right)} = 3^{x-y}\frac{1-3^y}{3^x - 1}$.

## 3. Похідна параметрично заданої функції

В геометрії, механіці, фізиці часто зустрічається параметричний спосіб задання рівняння, що описує криву на площині чи в просторі. Саму ж лінію можна розглядати як геометричне місце послідовних положень рухомої точки, координати $x$ та $y$ якої є функціями допоміжної змінної $t, v, S$ (часу, швидкості, відстані і т.д.) Допоміжну змінну називають параметром, а рівняння функції – параметричним рівнянням. Для прикладу, крива на площині визначається двома рівняннями:

$$\begin{cases} x = f(t); \\ y = g(t). \end{cases}$$

Похідна параметричної функції першого порядку знаходиться за правилом:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

***Приклад 4.*** Знайти похідні функцій, заданих параметрично.

$$\begin{cases} x = 3\sin 2t - \sin 3t; \\ y = 3\cos 2t + \cos 3t. \end{cases}$$

*Розв'язання*. Обчислимо похідні функції та аргументу за параметром $t$

$$x'_t = 3\cos 2t \cdot 2 - \cos 3t \cdot 3 = 6\cos 2t - 3\cos 3t;$$

$$y'_t = -3\sin 2t \cdot 2 - \sin 3t \cdot 3 = -6\sin 2t - 3\sin 3t.$$

Знайдені значення підставляємо у формулу похідної

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-6\sin 2t - 3\sin 3t}{6\cos 2t - 3\cos 3t} = \frac{2\sin 2t + \sin 3t}{\cos 3t - 2\cos 2t}.$$

## Контрольні питання

1. Як знайти похідну складеної функції?
2. Як знайти похідну неявно заданої функції?
3. Як знаходиться похідна параметрично заданої функції?

*Завдання практичної роботи №3* **Знаходження похідних складеної функції, параметрично та неявно заданих функцій**

1. Знайти першу похідну функції. Обчислити значення похідної при *x=2*.

1) $y=\ln(2x+5)$;
2) $y=\arcsin(1+\cos x)$;
3) $y=\sin(1+\cos x)$;
4) $y=\sin\ln x$;
5) $y=\ln\cos x$;
6) $y=\arcsin\frac{1}{x}$;
7) $y=\ln\frac{1}{x}$;
8) $y=ctg\sqrt{x}$;
9) $y=\sin^2 x$;
10) $y=5^{\lg x}$;
11) $y=\ln\sqrt{x}$;
12) $y=\log_3 5^{x^2}$;
13) $y=\lg x^2$;
14) $y=\ln tg\, x$;
15) $y=e^{\sin x}$;

2. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $y^2=3x+\cos y$
2) $\ln y=arctg\frac{x}{y}$
3) $4+\sin(x+y)=3x^2$
4) $tgy=3+x+e^y$
5) $x^3+y^3 3xy$
6) $y=(e^x-1)(e^y-1)-1$
7) $y^2+\ln y=2x$
8) $y=\sin(x-y)$
9) $x+y=y\cdot x-\cos y$
10) $y\cdot\sin x=\cos(x+y)$
11) $tgx=y^2-3y$
12) $x-y=-arctgy$
13) $y+x=3x\ln y$
14) $tg\frac{y}{x}=3x+y$
15) $\sin y=3x-tgy$

3. Рух точки задано параметричним рівнянням, знайти швидкість руху точки в момент часу *t=1c*.

1) $\begin{cases} x=e^{-2t} \\ y=e^t \end{cases}$;
2) $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=t^3+t \end{cases}$;
3) $\begin{cases} x=t^2-4t \\ y=t^2 \end{cases}$;
4) $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=\sin t+\cos t \end{cases}$;
5) $\begin{cases} x=1+e^{-2t} \\ y=t+e^t \end{cases}$;
6) $\begin{cases} x=3\sin t \\ y=4-4\sin(4t) \end{cases}$;
7) $\begin{cases} x=5t^2-1 \\ y=2t-5 \end{cases}$;
8) $\begin{cases} x=e^{t+1} \\ y=e^{t-1} \end{cases}$;

9) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^3 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x = \sin t - 1 \\ y = 1 - t \end{cases}$;

11) $\begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = 2t \end{cases}$;

12) $\begin{cases} x = \sin^2 t + 1 \\ y = -2\cos^2 t \end{cases}$;

13) $\begin{cases} x = 3\sin(2t) \\ y = \sin t \end{cases}$;

14) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$;

15) $\begin{cases} x = \sin t + 2 \\ y = \cos t + 3 \end{cases}$;