Практична робота №1. **Границя функції.**

Дослідження функцій на неперервність

Мета. Розвинути практичні навички знаходження границь функцій у заданій точці і в нескінченості, важливі границі; вміння досліджувати функцію на неперервність

1. Границя функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $D(f)$. Число A називають *границею функції y=f(x) в точці x_0*, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in D(f)$, які задовольняють нерівність $0 < x - x_0 < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записують: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 6} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to 6} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{4 \cdot 6^2 - 1}{2 \cdot 6 - 1} = 13$.

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0,5} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to 0,5} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x \to 0,5} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to 0,5} 2x + 1 = 2 \cdot 0.5 + 1 = 2$.

Нехай функція *y=f(x)* визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$. Число A називають границею функції *f(x)* при $x \to \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число *M>0*, що при *x>M* виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записують: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Нехай $x \to x_0$, при чому $x < x_0$. Якщо $f(x) \to B$, то B називається лівою границею і позначається так $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = B$. Аналогічно визначається права границя функції *f(x)* в точці x_0.

2. Основні теореми про границі

Теорема *(про границю суми, добутку і частки)*. Якщо кожна з функцій *f(x)* та *g(x)* має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$(якщо $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$) і справедливі формули:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}5\left(x^2-13x+5\right)$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2-13x+5\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2\right)-\lim\limits_{x\to 2}(13x)+\lim\limits_{x\to 2}5=20-26+5=-1.$

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)}=\dfrac{2}{2\cdot 1-1}=2$.

3. Методи розкриття невизначеностей

1) Невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ задана відношенням многочленів.

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Розв'язання: Розділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1+0+0}{3+0+0}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}=\dfrac{0}{3}=0$.

2) Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$.

Для того, щоб розкрити цю не визначеність, треба скоротити множник, який робить цю невизначеність.

Нагадаємо формули:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0,\ D=b^2-4ac$, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$;

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$.

Приклад 8. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left[\dfrac{8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-1}{6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\cdot\frac{1}{2}+1}\right]=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Розв'язання: Розкладемо на множники:

$$6x^2-5x+1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x-1).$$

$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1)$. Звідси

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6.$$

Приклад 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$

Розв'язання: Домножимо чисельник і знаменник функції на спряжене до $\sqrt{1+x^2}-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{0}{2}=0.$$

3) Невизначеність виду $\infty-\infty$.

Приклад10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\frac{x}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1.$$

4. Важливі границі

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Приклад11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$

Приклад12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1}=1.$

Приклад13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=0$

Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ або } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Приклад14.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{(2x-1)\frac{x-2}{3}\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^6.$$

5. Неперервність функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки. Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функція $y=f(x)$, буде неперервною в точці x_0, тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Поняття неперервності можна визначити за допомогою границь зліва і справа. Часто зустрічається поняття односторонньої неперервності.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, зліва, якщо вона визначена на пів інтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на пів інтервалі $[x_0; x_0 + \varepsilon)$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною в точці x_0 справа.

Функція $y=f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається *розривною в точці* x_0, а сама точка x_0 називається *точкою розриву*.

Види розривів:

а) Якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$ і $A \neq B$, то точка x_0 є *точкою розриву I роду*.

б) Якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$, то у точці x_0 – усувний розрив. В точці x_0 можна довизначити функцію $f(x_0) = f(x_0 + 0)$.

в) Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається *розривом II роду*.

Приклад15. *Функція* $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ не визначена в точці x=0, але має в цій точці границю, тому *x=0* – точка усувного розриву. Досить покласти $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, щоб функція стала неперервною.

Отже, функція

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$ є неперервною в точці *x=0*.

Приклад16.

Функція $f(x)=\begin{cases}3x^2, x\leq 1\\ x+2, x>1\end{cases}$ в точці *x=1* є неперервною, бо функція визначена в точці *x=1* і в будь-якому околі цієї точки. Крім того,

$f(1)=3$;

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} 3x^2=3$;

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x+2=3$.

Приклад17.

Функція $f(x)=\begin{cases}4-x^2, x<2\\ -1, x\geq 2\end{cases}$ має в точці *x=2* розрив I роду:

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 4-x^2=0$;

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-1)=-1$.

Стрибок функції в точці *x=2* дорівнює *1*.

Приклад18.

Функція $f(x)=\frac{1}{x-1}$ в точці *x=1* має розрив II роду, тому що

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$.

Приклад19. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=2^{\frac{1}{x+1}}$ в точці x=1. Функція не визначена в точці x=-1, тому функція в цій точці розривна. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа:

$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0} 2^{\frac{1}{x+1}}=0$; $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0} 2^{\frac{1}{x+1}}=+\infty$.

Отже x=-1 є точкою розриву другого порядку.

Теорема. *Якщо функція f(x) і g(x)* неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є функції $f(x)\pm g(x)$; $f(x)\cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$.

6. Асимптоти

1. Вертикальні асимптоти

Пряма $x=x_0$ називається вертикальною асимптотою до графіка функції $y=f(x)$, якщо хоч одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Приклад 20. Графік функції $y=\dfrac{1}{x}$ має вертикальну асимптоту $x=0$, бо $y\to+\infty$ при $x\to 0+0$ і $y\to-\infty$ при $x\to 0-0$.

2. Горизонтальна асимптота

Пряма $y=A$ називається горизонтальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

Приклад 21. Графік функції $y=\dfrac{1}{x}$ має горизонтальну асимптоту $y=0$, бо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

3. Пряма $y=kx+b,\ (k\neq 0)$ називається похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), якщо існують границі $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$.

Приклад 22. Знайти асимптоти до графіка функції $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$.

Розв'язання.

1) Знаходимо вертикальні асимптоти: $x=0$ – точка розриву ІІ роду даної функції і $y\to-\infty$ при $x\to 0+0$, $y\to+\infty$ при $x\to 0-0$ отже, вісь ординат $x=0$ – вертикальна асимптота.
2) Знаходимо горизонтальні асимптоти: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2-\dfrac{3}{x}\right)=\infty$.

   Отже, горизонтальних асимптот немає.
3) Знаходимо похилі асимптоти:

   $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=1,$$

   $$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-3}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=2.$$ Отже, пряма $y=x+2$ є похилою асимптотою.

Контрольні питання

1. Дайте означення границі функції в точці.
2. Наведіть приклад функції, яка не має границі в даній точці.
3. При яких умовах з існування односторонніх границь функції випливає існування границі функції?
4. Чи існує границя $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$?
5. Сформулюйте правила знаходження границь.
6. Дайте визначення неперервності функції в точці.
7. Яка різниця між поняттям функції і границею функції в точці x_o?
8. Сформулюйте теорему про арифметичні дії над неперервними функціями.
9. Які точки називаються точками розриву функції?
10. Дайте визначення точок розриву I і II роду.
11. Визначте в якій точці функція $y = \frac{|x|}{x}$ має розрив і якого роду?
12. Як знайти горизонтальні асимптоти?
13. Яка асимптота є вертикальною?
14. Умова існування похилої асимптоти.

Завдання практичної роботи №1. **Знаходження границь. Дослідження функцій на неперервність. Асимптоти**

1. Обчислити границі заданих функцій:

1) а) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^4+14x^3+67x^2+126x+72}{x^2+4x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2-\sqrt{-6x+52}}{x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{2+\sqrt[3]{-6x+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-tgx}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}$.

2) а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^4+3x^3-29x^2-75x+100}{x^2+2x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3-\sqrt{-12x+93}}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-8}{3-\sqrt[3]{9x-45}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 4x}{e^{2x}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}$.

3) а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^4+8x^3+9x^2-38x-40}{x^2-x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{4-\sqrt{-24x+160}}{x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{4+\sqrt[3]{12x-148}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-\sin x}{arctgx}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-7}\right)^{x+1}$.

4) а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4+-6x^3-13x^2+66x+72}{x^2+8x+15}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-\sqrt{-6x+55}}{x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{5-\sqrt[3]{15x+35}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x\cdot ctg^2 5x$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{x-1}}$.

5) а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-31x^2-32x+60}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{6-\sqrt{-24x+132}}{x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{6+\sqrt[3]{3x-231}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\left(e^{3x}-1\right)}{\sin^2 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-3}\right)^{x-3}$.

6) а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3-31x^2+x+30}{x^2-5x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7-\sqrt{-21x+112}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{7-\sqrt[3]{-7x+371}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x - tg2x}{\ln(3x+1)}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}}$.

7) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-7x^3+5x^2+31x-30}{x^2+3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-\sqrt{-8x+80}}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2+\sqrt[3]{-12x+28}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2\left(e^{2x}-1\right)}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{x+2}$.

8) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+5x^3-28x^2-92x+240}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{9-\sqrt{-18x+225}}{x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{4-\sqrt[3]{8x+48}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3x}{7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{1}{x-1}}$.

9) а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4+x^3-16x^2-4x+48}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{10-\sqrt{4x+72}}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{5+\sqrt[3]{-25x+75}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+e^{3x}-1}{\sin 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+1}\right)^{x+3}$.

10) а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-2x^3-17x^2+18x+72}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{11-\sqrt{-11x+187}}{x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{4-\sqrt[3]{12x+52}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg6x-5x}{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-11)^{\frac{1}{x-3}}$.

11) а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^4-18x^3+119x^2-342x+360}{x^2+x-30}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{6x-26}}{x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{2+\sqrt[3]{-8x+40}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)^2}{tg7x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+5}\right)^{x-2}$.

12) а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^4+x^3-42x^2-36x+216}{x^2-10x+24}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{-30x+129}}{x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{5-\sqrt[5]{10x+75}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x - tg3x}{\arcsin 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{1}{x+2}}$.

13) а) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^4-3x^3-40x^2+108x+144}{x^2-x-42}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4-\sqrt{8x-8}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{4+\sqrt[3]{6x-88}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(3x+1)}{tg^2 7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{x+2}$.

14) а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^4+13x^3+59x^2+107x+60}{x^2-3x-40}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5-\sqrt{9x+7}}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{5-\sqrt[3]{-5x+140}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx\cdot tg\dfrac{5x}{4}}{\sin^2 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{1}{1-x}}$.

15) а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^4-4x^3-15x^2+58x-40}{x^2+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{6-\sqrt{-36x+324}}{x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{4+\sqrt[3]{16x-96}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x+3x}{tg5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x-3}\right)^{x+1}$.

2. Дослідити на неперервність функцію. Знайти асимптоти.

1) а) $y=\begin{cases}1-x^3, & x<0,\\ (x-1)^3, & 0\le x\le 2,\\ 4-x, & x>2;\end{cases}$ б) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{|x-1|}$.

2) а) $y=\begin{cases}1-\dfrac{x^2}{2}, & x<-2,\\ \log_2(x+3), & x\ge -2;\end{cases}$ б) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$.

3) а) $y=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ 1, & 0\le x\le 1,\\ x-1, & x>1;\end{cases}$ б) $y=\dfrac{x^2-1}{|x-1|^2}$.

4) а) $y=\begin{cases} x^2-1, & x\le 0, \\ \sin\frac{x}{2}, & 0<x\le\pi, \\ \frac{3}{\pi}x+1, & x>\pi; \end{cases}$ б) $y=\frac{|x-1|}{(x-1)^2}$.

5) а) $y=\begin{cases} 2+x, & x\le -1, \\ \sin\frac{\pi x}{2}, & x>-1; \end{cases}$ б) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

6) а) $y=\begin{cases} 2, & x=0,\ x=\pm 2, \\ 4-x^2, & 0<|x|<2, \\ 4, & |x|>2; \end{cases}$ б) $y=\frac{|x+1|}{(x+1)^2}$.

7) а) $y=\begin{cases} x+1, & x\le 1, \\ 3-x^2, & x>1; \end{cases}$ б) $y=\frac{4-x^2}{|4x-x^3|}$.

8) а) $y=\begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x<0, \\ 0, & x\ge 0; \end{cases}$ б) $y=\frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$.

9) а) $y=\begin{cases} \frac{1}{4}x^2-1, & x\le 2, \\ \ln(x-1), & x>2; \end{cases}$ б) $y=\frac{(x-2)^2}{|x-2|}$.

10) а) $y=\begin{cases} -x+1, & x\le 0, \\ \sqrt{x}, & x>0; \end{cases}$ б) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}$.

11) а) $y=\begin{cases} \log_3(-x), & x\le -1, \\ x^2-1, & x>-1; \end{cases}$ б) $y=\frac{1}{\lg|x|}$.

12) а) $y=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x, & 0\le x<1, \\ -x^2+4x-2, & 1\le x<3, \\ 4-x, & x\ge 3 \end{cases}$ б) $y=\frac{(x-1)^2}{|x-1|}$.

13) а) $y=\begin{cases} \cos\pi x, & x<-1, \\ x+1, & x\ge -1; \end{cases}$ б) $y=\frac{-x^2+x+2}{x+1}$.

14) а) $y=\begin{cases} -2\sin x, & x\le -\frac{\pi}{2}, \\ -\sin x+1, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x\ge \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

15) а) $y=\begin{cases} \sin\frac{\pi x}{4}, & x<2, \\ \frac{x}{2}, & x\ge 2; \end{cases}$ б) $y=\frac{\sin\pi x}{1-x^3}$.